

Проблемы решения многокритериальных задач оптимального управления

Г.Г. Арунянц, А.Л. Рутковский

Рассмотрены основные проблемы постановки и решения многокритериальных задач оптимального управления сложными объектами. Доказаны леммы и теоремы о функционировании и поиске оптимальных решений в условиях многокритериальности систем

The main problems of multicriterial tasks' of optimal control of complex objects were examined. Lemmas and theorems about the functioning and search of optimal decisions were proved on the conditions of multicriterial system

Учитывая большой объем публикуемого материала, необходимого для освещения темы, публикация статьи осуществляется в двух частях с представлением каждой части в различных номерах журнала. Приведенная ниже часть включает основные результаты постановки и особенности предлагаемого подхода к решению многокритериальных оптимизационных задач. В следующей части предполагается представление результатов рассмотрения вопросов построения Парето-оптимального множества в задаче сближения с несколькими целевыми точками.

1. Постановка многокритериальных оптимизационных задач

При наличии нескольких независимых критериев для оценки управляющих воздействий в процессе оптимального управления для различных объектов (например, технологических, социально-экономических и др.) выбор наилучшего решения является нетривиальной задачей [1, 6, 8]. Очевидно, что в многокритериальной задаче максимизации из двух векторных оценок, отличающихся лишь одной компонентой, предпочтительнее та, у которой эта компонента больше. Гораздо сложнее сравнить векторные оценки, характеризующиеся отличиями многих компонент.

Пусть X - множество возможных исходов принятия решения. Каждый из исходов $x \in X$ оценивается с помощью векторного критерия $H(x) = \{H_1(x), \dots, H_i(x), \dots, H_m(x)\}$ (предположим, что степень предпочтительности исхода возрастает с возрастанием значений компонент вектора H). Поскольку $H \in R^n$, введем на множестве векторов $\{H\} \in R^n$ отношение строгого предпочтения ϕ так же, как это делается для n -мерного евклидова пространства R^n . Будем считать, что вектор $H' = \{H'_i\} \phi H'' = \{H''_i\}$ тогда и только тогда, когда $H'_i \phi H''_i$ для всех $i=1, \dots, m$. Аналогично введем отношение нестрогого предпочтения Φ . Будем говорить, что вектор $H' = \{H'_i\} \Phi H'' = \{H''_i\}$, если $H'_i \Phi H''_i$ для всех $i=1, \dots, m$.

Обозначим через $\chi = \{H(x) : x \in X\}$ множество оценок для всех возможных значений $x \in X$. Довольно очевидно, что если найдется такой вектор

$H^* \in \chi$, что $H^* \phi H$ для всех $H \in \chi$, то решение x^* , для которого $H(x^*)=H^*$, следует считать наилучшим, поскольку оно является наилучшим по всем компонентам векторного критерия H среди решений $x \in X$.

Векторную оценку $H^* \in \chi$ назовем максимальной по ϕ (по ϕ) относительно χ , если не существует оценки $H \neq H^*$, $H \in \chi$, такой, что $H \phi H^*$ ($H \phi H^*$). Оценка, максимальная по ϕ , является оптимальной (или эффективной) по Парето оценкой, а соответствующее решение x^* - оптимальным (или эффективным) по Парето.

Таким образом, оптимальное по Парето решение обладает тем свойством, что не существует никакого другого решения $x' \neq x^* \in X$, которое превосходит его в смысле отношения порядка ϕ по всем компонентам критерия H . Иными словами, если x^* - Парето-оптимальное решение, то из условия $H_i(x') \phi H_i(x^*)$, $i=1, \dots, m$, и должно следовать $x' = x^*$ (а значит, $H_i(x') = H_i(x^*)$).

Множество оценок $\chi \subset \chi$, удовлетворяющих этому условию, назовем множеством Парето, или эффективным множеством, а множество соответствующих решений $P(x) \subset X$ - множеством эффективных решений, или Парето-оптимальным множеством, т.е. $P(X) = \{x \in X : H(x) \in \chi\}$.

Векторная оценка $\bar{H} \in \chi$, максимальная по ϕ , является слабоэффективной, или слабооптимальной по Парето, или оптимальной по Слейтеру, а соответствующее решение \bar{x} - оптимальным по Слейтеру, или слабоэффективным. Таким образом, оптимальное по Слейтеру решение обладает тем свойством, что не существует никакого другого решения $x' \neq \bar{x} \in X$, которое превосходит его в смысле порядка ϕ по всем компонентам критерия H . Иными словами, если \bar{x} оптимальна по Слейтеру, то не существует такого $x' \in X$, что $H_i(x') \phi H_i(x^*)$, $i = 1, \dots, m$.

Множество оценок $\bar{\chi} \subset \chi$, оптимальных по Слейтеру, удовлетворяющих этому условию, назовем слабоэффективным множеством, а множество соответствующих решений $S(x) \subset X$ - слабоэффективным множеством решений, т.е. $S(x) = \{x \in X, \text{ для которых не существует } x' \in X, \text{ таких, что } H_i(x') \phi H_i(x)\}$.

Поскольку из условия $H \phi H'$ следует, что $H \phi H'$, то всякая эффективная оценка слабоэффективна, так что $\chi \subset \bar{\chi}$ и $P(x) \subset S(x)$.

Пусть множество χ [1] имеет вид, представленный на рис. 1 (случай двух критериев).

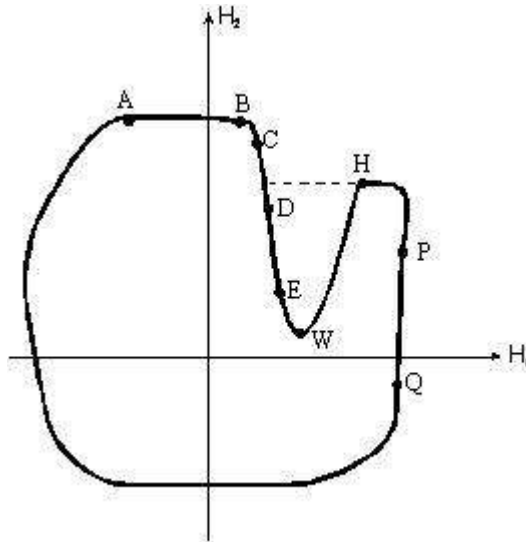


Рис. 1. Геометрическая интерпретация двумерного множества χ

Множество χ совпадает с "северо-восточной" границей множества χ (кривые bc , de без точек d и e , hp), а множество $\bar{\chi}$ состоит из кривой $abcde$ (включая e) и hpq .

Основной задачей многокритериальной оптимизации является выделение оптимального решения из множества всех возможных (допустимых) решений. Естественно, что хорошим следует считать метод, когда полученное решение оказывается эффективным или слабоэффективным. Рассмотрим два возможных подхода к выделению при этом оптимального решения.

Пусть $y_i^* = \max_{x \in X} H_i(x)$. Рассмотрим выражение

$$\max_{0 \leq i \leq m} \frac{y_i^* - H_i(x)}{|y_i^*|}, \quad (1)$$

оценивающее максимальное отклонение оценки H произвольного решения $x \in X$ от вектора $y^* = (y_1^*, \dots, y_i^*, \dots, y_m^*)$, представляющего собой вектор максимумов по каждому анализируемому критерию. В качестве оптимальной точки $x^* \in X$ предлагается выбрать точку x^* , минимизирующую выражение (1), т.е.

$$\max_{1 \leq i \leq m} \frac{y_i^* - H_i(x^*)}{|y_i^*|} = \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{y_i^* - H_i(x)}{|y_i^*|}.$$

Можно показать, что решение x^* всегда слабоэффективно, а если оно единственно (с точностью до эквивалентности), то и эффективно.

Другим методом выбора оптимального решения являются схемы, которые могут быть названы арбитражными схемами. Метод формулируется при некоторых предположениях о структуре множества χ и функций $H_i(x)$, $i=1, \dots, n$. Однако он может быть применен и в более общем случае.

Будем считать, что множество χ всевозможных оценок выпукло и компактно в R^n . Введем в рассмотрение некоторое исходное решение $x^0 \in X$, которое будет пониматься нами как "консервативное" решение, подлежащее улучшению при решении данной многокритериальной задачи. Значение вектора

полезностей H в точке $x^0 \in X$ $H(x^0) = \{H_1(x^0), \dots, H_m(x^0)\}$ будем называть точкой "статус-кво".

Под арбитражной схемой будем понимать правило φ , которое каждой паре $\{\chi, H(x^0)\}$ ставит в соответствие некоторую пару $(\bar{H}, \bar{x}) = \varphi(\chi, H(x^0))$, где $\bar{H} \in \chi$, $\bar{x} \in X$ и $\bar{H} = H(\bar{x})$ (\bar{x} интерпретируется как оптимальное решение).

Сформулируем для арбитражных схем аксиомы, которым должно удовлетворять правило φ , сопоставляющее каждому выпуклому замкнутому подмножеству χ в точке $H \in \chi$ некоторую пару (\bar{x}, \bar{H}) :

1. Реализуемость: $\bar{H} \in \chi$, $\bar{x} \in X$, $\bar{H} = H(\bar{x})$.
2. Индивидуальная рациональность: $H \not\in H(x^0)$.
3. Оптимальность по Парето: если $H \in \chi$ и $H \not\in \bar{H}$, то $\bar{H} = H$.
4. Независимость от посторонних альтернатив: если

$$\bar{H} \in A \subset \chi \text{ и } (\bar{H}, \bar{x}) = \varphi(\chi, H(x^0)) \text{ то } (\bar{H}, \bar{x}) = \varphi(A, H(x^0)).$$

5. Линейность: если множество $\chi' = \alpha\chi + \beta$ получается из χ с помощью линейного преобразования, т.е. $H'_i = \alpha_i H_i + \beta_i$ ($1 \leq i \leq m$), а $\varphi(\chi, H(x^0)) = (\bar{H}, \bar{x})$, то $\varphi(\chi', \alpha H(x^0) + \beta) = (\alpha \bar{H} + \beta, \bar{x})$.

Смысл трех первых аксиом достаточно ясен. Аксиома 4 означает, что, имея большие возможности для выбора (\bar{H}, \bar{x}) , можно согласиться на этот же выигрыш при меньших возможностях, если этот вектор реализуем. Аксиома линейности утверждает, что в разных шкалах измерения полезностей руководствуются одинаковым принципом оптимальности при выборе (H, x) .

Будем для простоты считать, что в множестве χ существует вектор H , каждая i -я координата которого строго больше $H_i(x^0)$. Имеет место следующее утверждение [2].

$$\text{Функция } \varphi(\chi, H(x^0)) = \{(\bar{H}, \bar{x}) \mid \max_{\substack{H \in \chi \\ H \in \chi}} g(H, \chi, H(x^0)) = g(\bar{H}(\bar{x}), \chi, H(x^0))\},$$

где $g(H, \chi, H(x^0)) = \prod_{i=1}^m (H_i - H_i(x^0))$, удовлетворяет аксиомам 1 - 4.

Исследуем теперь возможности скаляризации векторного критерия H . Оказывается, что для достаточно широкого класса случаев максимум скаляризованного критерия находится во множестве эффективных или слабоэффективных точек, и, наоборот, каждая эффективная или слабоэффективная точка в смысле векторного критерия H может быть вычислена как максимум некоторого скалярного критерия, полученного из H . Сформулируем более точно условия, при которых это имеет место.

Определение. Множество $S \subset R^n$ называется выпуклым, если оно вместе с любыми двумя точками содержит и соединяющий их отрезок, т.е. если $(\lambda x + (1 - \lambda)x') \in S$ при любых $x, x' \in S$ и $\lambda \in [0, 1]$.

Пусть для каждой точки $y \in R^n$ $A_y = \{y' : y' \leq y\}$, тогда множество S называется слабовыпуклым, если выпукло множество $S_* = \bigcup_{y \in S} A_y$.

Очевидно, что если некоторая оценка H слабоэффективна во множестве χ , то она будет слабоэффективной и во множестве χ_* .

Пусть χ слабовыпукло. Оценка $H \in \chi$ слабоэффективна тогда и только тогда, когда существует такой вектор $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$, $\mu_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, при котором $(\mu, H^*) \phi(\mu, H)$ для всех $H \in \chi$ (скобки означают скалярное произведение). Это утверждение сводит задачу нахождения слабоэффективных точек множества χ и слабоэффективных решений к задаче нахождения максимума линейной функции (μ, H) на множестве χ . При этом, перебирая всевозможные векторы $\{\mu : \sum_{i=1}^m \mu_i = 1, \mu_i \geq 0\}$, мы получаем все множество слабоэффективных решений.

Рассмотрим теперь применение этих положений для решения динамических многокритериальных задач.

2. Многокритериальные задачи оптимального управления

Пусть состояние технологически замкнутой системы описывается вектором $x \in R^n$ ($x \geq 0$). В начальный момент t_0 система находится в состоянии $x(t_0) = x_0$, и задача заключается в определении альтернатив ее развития на длительную перспективу $[t_0, T]$, где T – конец планируемого периода. Предположим, что развитие системы на отрезке времени $[t_0, T]$ может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), x \in R^n, u \in U \subset \text{comp} R^n,$$

где u – управляющий параметр, имеющий смысл внешних воздействий (скорость роста капиталовложений и ресурсов), с помощью которого происходит управление развитием. Будем считать, что параметр u выбирается непрерывно во времени и получившиеся в результате функции $u(t) \subset U, t \in [t_0, T]$, измеримы по t . Будем также считать выполненными все условия, гарантирующие существование, продолжимость и единственность решения системы

$$\dot{x} = f(x, u(t)) \quad (2)$$

при любом измеримом управлении $u(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ и при заданном начальном условии. Каждое управление $u(t)$, $t \in [t_0, T]$, определяет некоторую альтернативу движения $x(t)$, $t \in [t_0, T]$, получаемую как решение уравнения (2) при начальном условии $x(t_0) = x_0$.

Пусть $C^{T-t_0}(x_0)$ – множество достижимости системы (2), т.е. множество точек в R^n , в которые может попасть решение системы (2) из начального состояния x_0 в момент T при использовании всевозможных программных управлений $u(t)$, $t \in [t_0, T]$. Иными словами, множество достижимости – это множество концов траектории системы (2) $\{x(T)\}$, исходящих из начального состояния x_0 при всевозможных управлениях $u(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Предположим далее, что качество альтернативы развития определяется точкой $x(T)$, в которую переходит система в результате этого развития в конечный момент T . Таким образом, можно считать, что на множестве достижимости $C^{T-t_0}(x_0)$ системы (2) задан векторный критерий $H(x(T)) \in R^m, x(T) \in C^{T-t_0}(x_0)$, определяющий качество траектории $x(t)$ и

соответствующего управления $u(t)$. Мы приходим к динамической многокритериальной задаче оптимизации, рассмотренной в предыдущем разделе:

$$\chi(x_0, T - t_0) = \{x(T) : x(T) \in C^{T-t_0}(x_0)\}, \quad (3)$$

$$\kappa(x_0, T - t_0) = \{H(x(T)) : x(T) \in C^{T-t_0}(x_0)\}, \quad (4)$$

Здесь множества χ и κ зависят от параметров $x_0, T-t_0$, представляющих начальные условия задачи развития (2). Поскольку сформулированная динамическая многокритериальная задача зависит от начальных условий $x_0, T-t_0$ (начальное состояние системы и продолжительность планирования), будем обозначать ее через $\Gamma(x_0, T - t_0)$.

Итак, мы имеем динамическую многокритериальную задачу оптимизации $\Gamma(x_0, T - t_0)$, множество всевозможных исходов $\chi(x_0, T - t_0)$, определенных в выражении (3), и множество всевозможных оценок $\kappa(x_0, T - t_0)$, определенных в выражении (4).

Пусть даны: $k(x_0, T - t_0) \subset \kappa(x_0, T - t_0)$ - множество эффективных оценок;

$\bar{\kappa}(x_0, T - t_0) \subset \kappa(x_0, T - t_0)$ - множество слабоэффективных оценок;

$P[\chi(x_0, T - t_0)]$ и $S[\chi(x_0, T - t_0)]$ - соответствующие множества решений.

В динамических оптимизационных задачах очень важен вопрос о динамической устойчивости выбранного принципа оптимальности. Этот вопрос, являющийся следствием принципа максимума Л.С. Понтрягина и принципа оптимальности Р. Беллмана в случае классических однокритериальных динамических оптимизационных задач, при переходе к многокритериальным оптимизационным задачам и неантагонистическим игровым задачам становится серьезной проблемой [3-5].

Для исследования динамической устойчивости погрузим нашу конкретную динамическую задачу многокритериальной оптимизации $\Gamma(x_0, T-t_0)$, зависящую от начального условия x_0 и продолжительности процесса $T-t_0$, в семейство аналогичных многокритериальных оптимизационных задач с начальными условиями x_0 и продолжительностью $T-t$ ($t_0 \leq t \leq T$). Такую задачу обозначим через $\Gamma(x, T-t)$.

Как показано в предыдущем разделе, многокритериальные задачи характеризуются множественностью принципов оптимальности. Поясним для полноты требование динамической устойчивости принципов оптимальности или устойчивость принципов оптимальности во времени при развитии по оптимальному пути. Предположим, что в начале процесса, т.е. решая задачу $\Gamma(x_0, T-t_0)$, мы применили некоторый принцип оптимальности и в соответствии с ним построили оптимальную траекторию. В процессе движения вдоль этой траектории от задачи с одними начальными состояниями перейдем к задаче с другими начальными состояниями. Несмотря на то, что выбранная траектория является оптимальной в задаче для начальных состояний процесса, оставшийся отрезок траектории (начиная с некоторого текущего момента $t_0 \leq t \leq T$) может, вообще говоря, не быть оптимальной траекторией, реализующей тот же принцип оптимальности в задаче для начальных состояний на этой траектории,

соответствующих текущему моменту t . Поэтому у нас в момент t может не быть оснований придерживаться и далее выбранной траектории, что может привести к отказу от принятого в первоначальной задаче принципа оптимальности, т.е. неустойчивости процесса в целом. Требование динамической устойчивости заключается в сохранении первоначально выбранного движения в задачах с текущими начальными данными на оптимальной траектории.

К числу динамически устойчивых принципов оптимальности относится оптимальность по Парето и оптимальность по Слейтеру. Покажем динамическую устойчивость множества, оптимального по Парето (динамическая устойчивость слабоэффективного множества или множества оценок, оптимальных по Слейтеру, доказывается аналогично).

Действительно, пусть $K^1(x_0, T-t_0)$ – Парето-оптимальное множество оценок и $P(\chi(x_0, T-t_0))$ – Парето-оптимальное множество решений в многокритериальной динамической задаче оптимизации $\Gamma(x_0, T-t_0)$ из начального состояния x_0 с предписанной продолжительностью $T-t_0$ и терминальным выигрышем. Пусть $\{H_i^*\} = H^*$ – вектор оценок из множества $K^1(x_0, T-t_0)$, и предположим, что нами выбраны управление $\bar{u}(t)$ и соответствующая траектория $\bar{x}(t)$, при которых в конце процесса реализуется оценка $H^* = \{H_i^*\}$, т.е. управление $\bar{u}(t)$ таково, что $\bar{x}(T)$ в момент T (в момент окончания процесса) проходит через точку $\bar{x}(T)$, в которой $H(\bar{x}(T)) = \{H_i(\bar{x}(T))\}$ равно как раз вектору полезностей $H^* = \{H_i^*\}$.

Пусть $C^{T-t_0}(\bar{x}_0)$ – множество достижимости управляемой системы из начального состояния x_0 к моменту времени T . Рассматривая изменение этого множества вдоль траектории $x(\tau)$, можно заметить, что

$$C^{T-\tau_1}(\bar{x}(\tau_1)) \supset C^{T-\tau_2}(\bar{x}(\tau_2)), t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T. \quad (5)$$

Из выражения (5) имеем

$$\kappa(\bar{x}(\tau_1), T-\tau_1) \subset \kappa(\bar{x}(\tau_2), T-\tau_2), t_0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T.$$

Поскольку вектор $H^* = \{H_i^*\}$ принадлежит Парето-оптимальному множеству в задаче с начальным состоянием x_0 и продолжительностью $T-t_0$, то не существует такого вектора полезностей $H' \neq H^*$, принадлежащего $\kappa(x_0, T-t_0)$, что $H'_i \geq H_i^*$ для всех $1 \leq i \leq n$. Из выражения (5) имеем, что тем более это имеет место для множества $\kappa(\bar{x}(\tau), T-\tau), t_0 \leq \tau \leq T$. Таким образом, вектор полезностей $H^* = \{H_i^*\}$ не доминируется ни одним из дележей множества $\kappa(\bar{x}(\tau), T-\tau)$, или, иначе говоря, принадлежит Парето-оптимальным множествам текущей задачи с начальным условием $\bar{x}(\tau)$ и продолжительностью $T-\tau$. Это означает, что вектор полезностей $H^* = \{H_i^*\}$ во всех текущих задачах (при движении вдоль траектории $\bar{x}(\tau)$) остается Парето-оптимальным. Поскольку вектор H^* был выбран произвольно из множества $K^1(x_0, T-t_0)$, то это означает динамическую устойчивость Парето-оптимального множества.

Однако, как мы это видели в статическом случае, для выработки коллективного решения еще не достаточно Парето-оптимального множества, необходимо иметь некоторый справедливый способ выбора терминальной точки из Парето-оптимального множества, поскольку в действительности может быть реализован лишь один исход развития.

Рассмотрим теперь различные подходы к выбору конкретного эффективного (слабоэффективного) решения из множества всех эффективных (слабоэффективных) решений, упомянутых в предыдущем параграфе, и исследуем их динамическую устойчивость.

Слабоэффективное решение x^* , выбранное из условия

$$\max_{1 \leq i \leq m} \frac{y_i^* - H_i(x^*)}{|y_i^*|} = \min_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{y_i^* - H_i(x)}{|y_i^*|} \quad \text{в задаче } \Gamma(x_0, T-t_0), \quad \text{будем}$$

обозначать через $x^*(x_0, T-t_0)$ и соответствующую оценку $H(x^*)$ – через $H(x^*) = H^*(x_0, T-t_0)$, подчеркивая зависимость от начальных условий задачи. При этом заметим, что $y_i^* = \max_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} H_i(x)$, где \max берется по множеству достижимости $C^{T-t_0}(x_0)$, также зависит от начальных условий $x_0, T-t_0$ как от параметров, поэтому условие выбора точки $x^*(x_0, T-t_0)$ в полном виде записывается следующим образом:

$$\max_{1 \leq i \leq m} \frac{\max_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} H_i(x) - H_i[x^*, x_0, T-t_0]}{\left| \max_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} H_i(x) \right|} = \min_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{\max_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} H_i(x) - H_i(x)}{\left| \max_{x \in C^{T-t_0}(x_0)} H_i(x) \right|}. \quad (6)$$

Пусть $\bar{x}(t)$ - оптимальная траектория, ведущая в точку $x^*(x_0, T-t_0)$, т.е. $\bar{x}(t)|_{t=t_0} = x_0, \bar{x}(t)|_{t=T} = x^*(x_0, T-t_0)$. Рассмотрим текущую задачу $\Gamma(\bar{x}(t), T-t)$ при $t_0 \leq t \leq T$.

Предположим, что мы хотим в момент t проверить, удовлетворяет ли выбранная точка $x^*(x_0, T-t_0)$ условию (6), выписанному для текущей задачи. Тогда нам необходимо вновь выбрать слабоэффективную точку, используя предыдущую формулу для текущей игры. С этой целью необходимо вычислить

$$\min_{x \in C^{T-t}(\bar{x}(t))} \max_{1 \leq i \leq m} \frac{\max_{x \in C^{T-t}(\bar{x}(t))} H_i(x) - H_i(x)}{\left| \max_{x \in C^{T-t}(\bar{x}(t))} H_i(x) \right|}. \quad (7)$$

Пусть \min в выражении (7) достигается в точке $x^*(\bar{x}(t), T-t)$. Условие совпадения текущих слабоэффективных точек дает

$$x^*(x_0, T-t_0) = x^*(\bar{x}(t), T-t) \quad (8)$$

при $t \in [t_0, T]$. Очевидно, что выражение (8) имеет место в крайне редких случаях, поскольку множества $C^{T-t}(\bar{x}(t))$ убывают по включению при $t \in [t_0, T]$ и

$\max_{x \in C^{T-t}(\bar{x}(t))} H_i(x)$ также, вообще говоря, убывает, кроме тривиального случая, когда он достигается при всех $1 \leq i \leq m$ в одной и той же точке $x^*(x_0, T-t_0)$. Это означает, что выбор слабо эффективной точки с использованием формулы (6) не является динамически устойчивым.

Для исследования динамической устойчивости арбитражной схемы Нэша необходимо конкретизировать понятие "консервативного" решения и точки статус-кво. Формально говоря, под консервативным решением в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ можно понимать любую точку $x^0(T)$ множества достижимости $C^{T-t_0}(x_0)$. Однако эта точка $x^0(T)$ должна являться концом траектории $x^0(t)$, $t \in [t_0, T]$, определяющей развитие при использовании управления $\tilde{u}^0, t \in [t_0, T]$, получаемого экстраполяцией управления $\tilde{u}(\tau), \tau < t_0$.

Пусть $(\bar{H}(x_0, T-t_0), \bar{x}(x_0, T-t_0)) = \varphi(\kappa(x_0, T-t_0), H[x^0(x_0, T-t_0)])$ - выбор эффективной точки согласно арбитражной схеме φ в задаче $\Gamma(x_0, T-t_0)$ при условии, что консервативное решение есть точка $x^0(x_0, T-t_0) \in C^{T-t_0}(x_0)$. Как мы уже видели, точка $(\bar{H}(x_0, T-t_0), \bar{x}(x_0, T-t_0))$ определяется из условия

$$\begin{aligned} & \varphi(\kappa(x_0, T-t_0), H[x^0(x_0, T-t_0)]) = \\ & = \{(\bar{H}(x_0, T-t_0), \bar{x}(x_0, T-t_0)) \mid \max_{H \geq H[x^0(x_0, T-t_0)]} \prod_{i=1}^m (H_i - H_i[x^0(x_0, T-t_0)]) = \\ & = \prod_{i=1}^n (\bar{H}_i(\bar{x}) - \bar{H}_i[x^0(x_0, T-t_0)])\}. \end{aligned}$$

Пусть $x^*(t)$ - оптимальная траектория, соединяющая точку x_0 с $\bar{x}(x_0, T-t_0)$, т.е. $x^*(t)|_{t=t_0} = x_0, x^*(t)|_{t=T} = \bar{x}(x_0, T-t_0)$. Рассмотрим арбитражную схему для текущей задачи $\Gamma(x^*(t), T-t), t_0 \leq t \leq T$. Пусть $(\bar{H}(x^*(t), T-t), \bar{x}(x^*(t), T-t))$ - выбор, диктуемый арбитражной схемой, т.е.

$$\begin{aligned} & \varphi(\kappa(x^*(t), T-t), H[x^0(x^*(t), T-t)]) = \\ & = \{(\bar{H}(x^*(t), T-t), \bar{x}(x^*(t), T-t)) \mid \max_{H \in H[x^0(x^*(t), T-t)]} \prod_{i=1}^m (H_i - H_i[x^0(x^*(t), T-t)]) = \\ & = \prod_{i=1}^n (\bar{H}_i(\bar{x}) - H_i[x^0(x^*(t), T-t)])\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Динамическая устойчивость означает выполнение условия

$$\bar{x}(x^*(t), T-t) = \bar{x}(x_0, T-t_0) \quad (10)$$

при всех $t \in [t_0, T]$. Как видно из выражения (9), это зависит от характера изменения "консервативного" решения $x^0(x^*(t), T-t)$ и точки "статус-кво" $H_i(x^0(x^*(t), T-t))$ вдоль оптимальной траектории $x^*(t)$ при $t \in [t_0, T]$. Предварительный анализ показывает, что выражение (10) выполняется в крайне редких случаях.

Что касается метода выбора эффективного (слабо эффективного) решения, основанного на свертке критериев, то в этом случае задача сводится к некоторой задаче оптимального управления с одним критерием, для которого выполнены принцип максимума Л.С. Понтрягина и принцип оптимальности Р. Беллмана. Следовательно, полученное в результате эффективное (слабоэффективное) решение будет всегда динамически устойчивым.

Вторая часть настоящей работы, посвященная вопросам построения Парето-оптимального множества в задаче сближения с несколькими целевыми точками, будет опубликована в следующем номере настоящего журнала.

Литература

1. Арунянц Г.Г. Автоматизированный синтез и анализ многомерных систем управления технологическими объектами [Текст] / Г.Г. Арунянц, К.Х. Пагиев, В.М. Текиев. – Владикавказ: Иристон, 2000. - 268 с.
2. Дюбин Г.Н. Введение в прикладную теорию игр [Текст] / Г.Н. Дюбин, В.Г. Суздаль. – М.: Высшая школа, 1981. - 366 с.
3. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования [Текст] / Л.А. Петросян. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977, 224 с.
4. Петросян Л.А. Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками [Текст] / Л.А. Петросян // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1977. - №19, вып. 4. - С. 46-52.
5. Петросян Л.А. Оптимизация распределения капиталовложений по отраслям сельскохозяйственного производства [Текст] / Л.А. Петросян, И.Ф. Тихонова/ В кн.: Математические методы оптимизации и структурирования систем. - Калинин: Тверь, 1979. - С. 53-65.
6. Подиновский В.В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
7. Сухарев А.Г. Курс методов оптимизации [Текст] / А.Г. Сухарев. - М.: Наука, 1986. С. 83.
8. Хадзарагова Е.А. Многоуровневые системы управления металлургическим заводом [Текст] / Е.А. Хадзарагова, А.Л. Рутковский, Владикавказ: "Терек", 1999. -143 с.